18 確率（２）

156

(1) ${}_8C_8\left(\frac{2}{3}\right)^8=\frac{256}{6561}$

(2) $\left\{1-{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\}\left\{1-{}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\right\}=\frac{11}{27}\cdot\frac{65}{81}=\frac{715}{2187}$

(3)

下表の 4 つの場合がある。

任意の確率は 1 だから，それぞれの確率は上から順に

${}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}\cdot{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}\cdot{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\frac{2}{3}$，$\frac{2}{3}\cdot{}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5$

よって，求める確率は，これらの和より，$2\left\{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}=\frac{20}{2187}$

問 1	問 2	問 3	問 4	問 5	問 6	問 7	問 8
○	○	○	○	○	×	任意	任意
×	○	○	○	○	○	×	任意
任意	×	○	○	○	○	○	×
任意	任意	×	○	○	○	○	○

157

(1)

ひきだし A の異なる 3 ヶ所に色が金，銀，銅のメダルのどれかを置くとしても確率に影響しない。このとき，置き方は全部で3^3通りあり，このうち色が 2 種類となる置き方は$3\left(2^3-2\right)$通りある。

よって，$\frac{3\left(2^3-2\right)}{3^3}=\frac{2}{3}$

補足

それぞれのヶ所に置くメダルの色は 3 通りずつあるから，全部で3^3通り。

それぞれのヶ所に置くメダルの色は 2 通りずつだから2^3通りあり，このうち 1 色のみが 2 通りある。よってこの 2 つを除くことにより，2^3-2通り。これと 2 色の選び方が 3 通りあることから，$3\left(2^3-2\right)$通り。

(2)

(1)と同様に考えて,ひきだしAの3ヶ所とひきだしBの2ヶ所にメダルを置くとすると,置き方は全部で$3^3\cdot 2^2$通りある。

2つのメダルの色が金と銀の場合：$2^5-2=30$通り

2つのメダルの色が金と銅の場合：$2^3\cdot 1^2-1=7$通り

2つのメダルの色が銀と銅の場合：$2^3\cdot 1^2-1=7$通り

よって，$\dfrac{30+7+7}{3^3\cdot 2^2}=\dfrac{11}{27}$

(3)

金メダルが3枚入っている場合の数

A$(g,\ g,\ g)$，B$(s,\ s)$のとき

1通り

A$(g,\ g,\ (b,\ s))$，B$(g,\ s)$のとき

Aでは，2ヶ所を選んでgを置き，残りの1ヶ所にはbまたはsを置くから，

3通り×2通り＝6通り

Bでは，1ヶ所にgを置き，残りの1ヶ所にはsを置くから2通り×1通り＝2通り

よって，$6\cdot 2=12$通り

A$(g,\ (s,\ b),\ (s,\ b))$，B$(g,\ g)$のとき

Aでは，1ヶ所を選んでgを置き，残りの2ヶ所にはbまたはsを置くから，

3通り×$2\cdot 2$通り＝12通り

Bでは，2ヶ所にgを置くだけだから1通り

よって，$12\cdot 1=12$通り

よって，全部で$1+12+12=25$通り

金メダルが3枚入っている条件の下，ひきだしAのメダルが2種類である場合の数

A$(g,\ g,\ (b,\ s))$，B$(g,\ s)$のとき

12通り

A$(g,\ (s,\ b),\ (s,\ b))$，B$(g,\ g)$のとき

$3\cdot(2^2-2)\cdot 1=6$通り

よって，全部で$12+6=18$通り

以上より，求める確率は$\dfrac{18}{25}$

158

赤玉が k 回取り出される確率を P_k とすると，$P_k = {}_{30}\mathrm{C}_k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 30)$

したがって，$P_{k-1} < P_k$ とすると，$\frac{P_k}{P_{k-1}} > 1$

これと，

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{{}_{30}\mathrm{C}_k \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{7}{10}\right)^{30-k}}{{}_{30}\mathrm{C}_{k-1} \left(\frac{3}{10}\right)^{k-1} \left(\frac{7}{10}\right)^{31-k}} = \frac{93-3k}{7k}$$

より，$\frac{93-3k}{7k} > 1 \quad \therefore k < 9.3$

よって，$k \leq 9$ のとき $P_{k-1} < P_k$，$k \geq 10$ のとき $P_{k-1} > P_k$

すなわち $P_0 < P_1 < \cdots < P_8 < P_9 > P_{10} > P_{11} > \cdots > P_{30}$

ゆえに，赤玉を 9 回取り出す確率が最も大きい。

159

(1)

玉を順に 4 個並べた順列のうち，青青青赤となる順列の占める割合を求めるのと同じ。

このとき，すべての玉を区別し 4 つ並べるとすると，全順列の数は ${}_{10}\mathrm{P}_4$，青青青赤となる順列の数は ${}_7\mathrm{P}_3 \cdot {}_3\mathrm{P}_1$ だから，求める確率は $\frac{{}_7\mathrm{P}_3 \cdot {}_3\mathrm{P}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_4} = \frac{1}{8}$

(2)

玉を順に 8 個並べた順列のうち, 青玉 5 個と赤玉 3 個の順列が占める割合と同じである。

すべての玉を区別すると，全順列の数は ${}_{10}\mathrm{P}_8$

青玉 5 個と赤玉 3 個の順列の数については,

青玉 5 個と赤玉 3 個選び，その 8 個を並べるとすれば ${}_7\mathrm{C}_5 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 \cdot 8!$

青玉を並べる位置を選び, そこに青玉を並べ, 残りに赤玉を並べるとすれば ${}_8\mathrm{C}_5 \cdot {}_7\mathrm{P}_5 \cdot {}_3\mathrm{P}_3$

いずれにせよ，$\frac{{}_7\mathrm{C}_5 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 \cdot 8!}{{}_{10}\mathrm{P}_8} = \frac{7}{15}$，$\frac{{}_8\mathrm{C}_5 \cdot {}_7\mathrm{P}_5 \cdot {}_3\mathrm{P}_3}{{}_{10}\mathrm{P}_8} = \frac{7}{15}$

(3)

(2)と同様にして，玉 8 個の順列のうち 8 番目が赤玉となるような青玉 5 個と赤玉 3 個の順列が占める割合を求めればよい。

よって，$\frac{{}_7\mathrm{C}_5 \cdot {}_3\mathrm{C}_3 \cdot 3 \cdot 7!}{{}_{10}\mathrm{P}_8} = \frac{7}{40}$ または $\frac{{}_7\mathrm{C}_5 \cdot {}_7\mathrm{P}_5 \cdot {}_3\mathrm{P}_3}{{}_{10}\mathrm{P}_8} = \frac{7}{40}$

160

(1)

表が出る回数で排反に分類すると，（表の回数，裏の回数）は$(3,\ 0)$, $(2,\ 2)$, $(1,\ 4)$, $(0,\ 6)$

よって，$\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4+{}_5C_1\left(\frac{1}{2}\right)^5+\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{43}{64}$

(2)

P が 1 周目の F に到達後 A を経ずに 2 周目の B に移動してから A に戻ればよい。

1 周目の F に到達する確率と 2 周目の B から A に戻る確率は，(1)と同様にして，

いずれも${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{21}{32}$

F から B へ移動する確率は$\frac{1}{2}$

よって，$\frac{21}{32}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{32}=\frac{441}{2048}$

161

(1)

表が赤である確率は$\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$，表が赤で裏も赤である確率は$\frac{2}{6}$

よって，求める確率は$\dfrac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{5}$

(2)

R/R →（B/B または B/R または B/Y）の場合

$$\frac{2}{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{15}$$

R/B →（B/B または B/Y）の場合

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{40}$$

よって，$\dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{15}+\frac{1}{40}}=\frac{16}{19}$

162

(1)

座標 x を原点に関しての対称移動した点を $f(x)$ とすると，$f(x)=-x$，

座標 1 に関して対称移動した点を $g(x)$ とすると，$\dfrac{x+g(x)}{2}=1$ より，$g(x)=-x+2$

よって，

$f(f(x))=f(-x)=x$ ・・・①

$g(g(x))=g(-x+2)=x$ ・・・②

$f(g(x))=f(-x+2)=x-2$ ・・・③

$g(f(x))=g(-x)=x+2$ ・・・④

したがって，①または②となる確率を求めればよい。

①は 2 回とも表，②は 2 回とも裏の場合だから，求める確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

(2)

(1)において，①から④の試行回数はそれぞれ 2 回だから，硬貨を $2n$ 回投げたとき①～④それぞれの事象が起こった回数の和をとると n になる。

そこで，事象が起こった回数について，①と②は座標が変化しないから，①または②が起こった回数を k，③が起こった回数を l，④が起こった回数を m とすると，

$k\geq 0,\ l\geq 0,\ m\geq 0$ ・・・⑤

$k+l+m=n$ ・・・⑥

硬貨を $2n$ 回投げたとき石の座標は $x-2k+2l$

これと $x=0$ より，$-2l+2m=2n-2$　$\therefore -l+m=n-1$ ・・・⑦

⑥－⑦より，$k+2l=1$

これと⑤より，$k=1,\ l=0$

さらに，これと⑥より，$m=n-1$

よって，①または②が 1 回，④が $n-1$ 回起こったとき石の座標は $2n-2$ となる。

①または②が起こる確率は，(1)より，$\dfrac{1}{2}$，④が起こる確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ だから，

求める確率は ${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{2^{2n-2}}=\dfrac{n}{2^{2n-1}}$